JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 104–107 (1978)

Zum Nullstellensatz von Krein für Haar'sche Räume

RICHARD HAVERKAMP

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität, 4400 Münster, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received October 11, 1976

Ist $\bar{I} = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $L_n \subset C(\bar{I})$ ein Haar'scher Raum der Dimension $n + 1$, so hat nach Definition jedes $f \in L_n \backslash \{0\}$ in $\bar{I}$ höchstens n Nullstellen.

Bezeichnet man Nullstellen im offenen Intervall $I = (a, b)$, in denen das Vorzeichen nicht wechselt, als zweifache, die übrigen als einfache Nullstellen, so hat jedes $f \in L_n \backslash \{0\}$ auch unter Berücksichtigung der Vielfachheit höchstens n Nullstellen.

Speziell haben Elemente aus

$$L_n^+ = \{f \in L_n \backslash \{0\}; f(x) \geqslant 0 \text{ für } x \in \bar{I}\}$$

in I nur zweifache Nullstellen.

Mit den Bezeichnungen

$$w(t) = \begin{cases} 2, & t \in I \\ 1, & t \in \bar{I} \backslash I \end{cases} \qquad \text{und} \qquad W(N) = \sum_{t \in N} w(t)$$

für endliche Teilmengen N von $\bar{I}$ gilt also für die Nullstellenmenge $N(f)$, der Funktionen $f \in L_n^+$ die Abschätzung $W(N(f)) \leqslant n$.

Bei der Untersuchung von Čebyšev-Systemen, insbesondere deren Momentenräume (vgl. Karlin u. Studden [1]), erweist sich als wesentliches Hilfsmittel der folgende

NULLSTELLENSATZ (von Krein [2]). *Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $L_n \subset C(\bar{I})$ ein Haar'scher Raum der Dimension $n + 1$ und $N \subset \bar{I}$ Teilmenge mit $W(N) \leqslant n$, so gibt es ein $f \in L_n^+$ für das $N(f) = N$. Die gleiche Aussage gilt für gerade n unter der zusätzlichen Annahme, daß N beide Randpunkte oder keinen Randpunkt enthält.*

Bisher war nicht bekannt, ob es im Fall gerader $n \geqslant 2$ ein f in L_n^+ gibt,

0021-9045/78/0232–0104$02.00/0

das in genau einem Randpunkt und vorgegebenen $k < n/2$ inneren Punkten verschwindet. Durch Angabe von Beispielen wird hier gezeigt, daß dies im allgemeinen nicht zutrifft.

Sei

$$u_0(x) = 1, \qquad u_1(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - x,$$
$$u_j(x) = x^{j-2}(x^2 - 1)^2 \qquad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \geqslant 2,$$

und $\hat{L}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die lineare Hülle von $\{u_j : 0 \leqslant j \leqslant n\}$.

Dann bestehen für jedes $f \in \hat{L}_n$ die Relationen

$$f(-1) = f(1) + 2f'(1), \tag{1}$$
$$f'(-1) = f'(1), \tag{2}$$

denn sie gelten für jedes der Polynome u_j.

Eine unmittelbare Konsequenz ist:

Behauptung A. *Jedes auf $\bar{I} = [-1, 1]$ nicht negative f aus $\hat{L}_n$ verschwindet in beiden Randpunkten oder in keinem Randpunkt.*

Denn nimmt man an

$$f(-1) > 0, \qquad f(1) = 0,$$

so gilt nach (1) die Ungleichung $f'(1) > 0$. Unter der Annahme

$$f(-1) = 0, \qquad f(1) > 0,$$

muß nach (1) und (2) notwendig $f'(-1) < 0$ gelten. In beiden Fällen nimmt also f in $[-1, 1]$ auch negative Werte an. Nach obigem Nullstellensatz ist also

$$L_n := \{f \mid [-1, 1] : f \in \hat{L}_n\} \tag{3}$$

für ungerade n nicht Haar'scher Raum. Es gilt jedoch

Behauptung B. *Für jedes gerade n ist der unter* (3) *erklärte Raum L_n ein Haar'scher Raum.*

Beweis. Sei $n \geqslant 2$ gerade

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j u_j, \qquad \sum_{j=0}^{n} |c_j| > 0.$$

Dann ist zu zeigen, daß f in $[-1, 1]$ höchstens n verschiedene Nullstellen hat.

Wegen $u_0(x) = 1$, Grad $u_j = j + 2$ für $j \geqslant 1$ ist f nicht triviales Polynom mit Grad $f \leqslant n + 2$.

Ist x_0 nicht reelle Nullstelle von f, so auch $\bar{x}_0$, und es gibt höchstens n reelle Nullstellen. Es genügt also, Polynome $f \in \hat{L}_n \backslash \{0\}$ zu betrachten, die nur reelle Nullstellen haben. Dann sind auch die Nullstellen von f' reell, und die Nullstellen von f schließen die von f' ein.

Gilt Grad $f = n + 1$, so darf man f in der Form

$$f(x) = x^{n+1} + g(x) \qquad \text{mit Grad } g \leqslant n$$

annehmen. Da $n + 1$ ungerade ist, müßte gelten

$$f(-1) \leqslant 0, \qquad f(1) \geqslant 0, \qquad f'(1) > 0, \tag{4}$$

wenn es $n + 1$ verschiedene Nullstellen in $[-1, 1]$ gäbe. Die Relationen (4) stehen jedoch zu (1) im Widerspruch.

Ist Grad $f = n + 2$, so darf man

$$f(x) = x^{n+2} + h(x) \qquad \text{mit Grad } h \leqslant n + 1$$

annehmen, und da mit $f(x)$ auch $f(-x) = x^{n+2} + h(-x)$ zu $\hat{L}_n$ gehört, sei ohne Einschränkung

$$f(-1) \leqslant f(1).$$

Gilt $f(-1) = f(1)$, so folgt nach (1) und (2)

$$f'(-1) = f'(1) = 0.$$

Dann hat also f' in $(-1, 1)$ höchstens $n - 1$ und f nach dem Satz von Rolle in $[-1, 1]$ höchstens n verschiedene Nullstellen.

Bleibt noch der Fall

$$f(-1) < f(1) \tag{5}$$

zu behandeln.

Mit (1) und (5) folgt zunächst

$$f'(1) < 0. \tag{6}$$

Also hat f' und damit auch f in $(1, \infty)$ wenigstens eine Nullstelle.

Ist $f(-1) < 0$, so gibt es auch in $(-\infty, -1)$ eine Nullstelle. Gilt hingegen $f(-1) \geqslant 0$ und damit nach (5) und (6)

$$f(1) > 0, \qquad f'(1) < 0,$$

so gibt es in $(1, \infty)$ zwei einfache oder eine zweifache Nullstelle.

In jedem der Fälle $f(-1) < 0$ und $f(-1) \geqslant 0$ gibt es also in $[-1, 1]$ höchstens n Nullstellen. Damit ist Behauptung B beweisen.

Als einfache Folgerungen der Behauptungen A, B seien hier noch angeführt:

BEHAUPTUNG C. *Ist $n \geqslant 2$ gerade, so gibt es einen $n + 1$-dimensionalen Haar'schen Raum $L_n \subset C[-1, 1]$, der keinen Haar'schen Teilraum gerader Dimension enthält.*

BEHAUPTUNG D. *Ist $n \geqslant 2$ gerade, $\{u_j : 0 \leqslant j \leqslant n\} \subset C[-1, 1]$ ein Čebyšev-System und $c > 0$, so gibt es nicht notwendig ein Čebyšev-System $\{v_j : 0 \leqslant j \leqslant n\} \subset C[-1, 1 + c]$, bei dem v_j für $0 \leqslant j \leqslant n$ stetige Fortsetzung von u_j ist.*

Die Behauptung C bzw. D erhält man unmittelbar mit der Aussage des Nullstellensatzes für ungerade bzw. gerade n.

LITERATUR

1. S. J. KARLIN AND W. J. STUDDEN, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Interscience, New York/London/Sydney, 1966.
2. M. G. KREIN, The ideas of P. L. Čebyšev and A. A. Markov in the theory of limiting values of integrals and their further developments. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **12** (1951), 1–122.